25.5 Geraden im Raum

Jede Gerade im Raum kann vektorgeometrisch wie folgt beschrieben werden:

- Angabe eines Punktes A, der auf der Geraden liegt.
- Angabe einer räumlichen Richtung der Geraden durch einen Richtungsvektor $\vec{v}$.

Definition 25.5.1 Parameterdarstellung einer Geraden

Jede Gerade g kann wie folgt beschrieben werden. Man wähle einen Punkt A auf der Geraden, genannt **Aufpunkt**, und einen **Richtungsvektor** $\vec{v}$ der Geraden (es gilt $\vec{v} \neq \vec{0}$). Dann sind die Ortsvektoren aller Punkte der Geraden g wie folgt gegeben.

$$\vec{g}(t) = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{v} \qquad \text{für beliebiges } t \in \mathbb{R}$$

Die reelle Zahl t heisst **Parameter**: Jeder Wert von t liefert genau einen Punkt der Geraden (bzw. genauer den Ortsvektor eines Punktes der Geraden).
Man spricht deswegen von einer **Parameterdarstellung** oder **Parametrisierung** der Geraden g.

25.5.2. Man kann sich eine Gerade wie einen (unendlich langen) Massstab im Raum vorstellen, der einen Nullpunkt (den Aufpunkt A), eine Richtung («Einheitsrichtungsvektor») und eine Skala (den Parameter t) hat. Der Richtungsvektor $\vec{v}$ gibt Distanz und Richtung zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzzahligen Markierungen auf der Skala an.

Aufgabe 25.13 Gegeben sind die Punkte $A = (-2, 4, -1)$, $B = (0, 3, 1)$ und $C = (4, 1, 1)$. Sei g die Gerade durch die Punkte A und B.

a) Bestimmen Sie zwei unterschiedliche Parameterdarstellungen der Geraden g.

b) Liegt der Punkt C auf g?

c) Wo schneidet g die x-y-Ebene?

d) Finden Sie einen Punkt P auf g so, dass der Vektor $\overrightarrow{PC}$ senkrecht zur Geraden steht. Lösen Sie diese Aufgabe auch mit dem TR, ausgehend von 3 Variablen a, b und c für die Koordinaten der 3 Punkte A, B, C (z. B. soll $a = \vec{a} = \vec{A} = \overrightarrow{OA}$ der Ortsvektor von A sein). Definieren Sie dann eine Funktion $g(t)$ für die Gerade.

e) Wie könnte der Abstand vom Punkt C zur Gerade g sinnvoll definiert sein? Wie gross ist dieser?

Merke 25.5.3 Vektorgleichungen auf dem TI-92 Plus

Leider kann der Ti-92 Plus keine Vektorgleichungen lösen. Darum rüsten wir die Funktion `veq` nach, die eine Vektorgleichung komponentenweise als Gleichungssystem schreibt.

```
veq(eq)
Func
    Return eq[1,1] and eq[1,2] and eq[1,3]
EndFunc
```

Der TI-*n*spire kann mit `solve` auch Vektorgleichungen lösen. Beide Rechner melden `false` (falsche Aussage), wenn es keine Lösung gibt.

Aufgabe 25.14 Gegeben sind die Parameterdarstellungen der fünf Geraden a, b, c, d und e.

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\2\\6\end{pmatrix} \qquad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix}-1\\-1\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}6\\-3\\-9\end{pmatrix} \qquad \vec{c}(t) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}10\\-5\\-15\end{pmatrix}$$

$$\vec{d}(t) = \begin{pmatrix}1\\2\\12\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix} \qquad \vec{e}(t) = \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-8\\-4\\-6\end{pmatrix}$$