

Skalarprodukt und Winkelberechnungen

Satz 25.4.6 Skalarprodukt und Winkel

Für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\left(\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right)$$

wobei $\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist (es ist hier egal, ob man den «kleineren» oder den «grösseren» der beiden in Frage kommenden Winkel nimmt, denn $\cos(\alpha) = \cos(360° - \alpha)$).
Diese Formel wird recht selten zur Berechnung des Skalarprodukts verwendet. Meist wird sie $\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right)$ bzw. $\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ aufgelöst und erlaubt dann die Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren:

$$\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right) = \qquad\qquad \text{bzw.} \qquad \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) =$$

Beweis: Mit Hilfe des Kosinussatzes, siehe Aufgabe 25.9

Merke 25.4.7 Wertebereich von $\arccos(x)$

Die Arcuscosinusfunktion arccos, die Umkehrfunktion der Cosinusfunktion cos, liefert Winkel im Bereich $[0, 180°]$ (bzw. $[0, \pi]$ im Bogenmass).

Aufgabe 25.8 Berechnen Sie alle Winkel zwischen den folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix},$$

Was ist speziell an der gegenseitigen Lage dieser Vektoren? Welcher Winkel ist auf den zweiten Blick offensichtlich? Wie hängen die anderen beiden Winkel zusammen?
Gilt ein solcher Zusammenhang für beliebige drei Vektoren? Begründen Sie oder finden Sie ein Gegenbeispiel. Unter welcher Voraussetzung gilt ein solcher Zusammenhang auch für andere Winkel als 180°?

Cosinussatz

Satz 25.4.8 Cosinussatz

Für jedes beliebige Dreick ABC gilt: (übliche Bezeichung der Seiten, γ ist der Winkel bei C, also der Winkel zwischen den Seiten a und b)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

Der Cosinussatz ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras (warum?).

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass $\gamma \leq 90°$.
Sei H der Höhenfusspunkt der Höhe h_a über der Seite a. Die Länge der Höhe lässt sich aus der Länge b und dem Winkel γ berechnen:

$$h_a = ✎$$

Analog lässt sich die Länge von $p = \overline{CH}$ aus b und γ berechnen:

$$p = ✎$$

Daraus ergibt sich $q = \overline{HB}$ als Differenz:

$$q = ✎$$

Damit lässt sich c^2 aus h und q berechnen:

$$c^2 = ✎$$