Beweis. Für $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ berechnen wir: Hinweis: Linke und rechte Seite ausschreiben und zeigen, dass sie gleich sind.

$\vec{v} \cdot \vec{v} =$ ✎ $= |\vec{v}|^2$

□

Merke 25.4.5 Eigenschaften des Skalarprodukts/Rechenregeln für das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt hat die folgenden Eigenschaften.

Verträglichkeit mit Addition	$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
Verträglichkeit mit Zahl-Vektor-Multiplikation	$(\lambda \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda (\vec{v} \cdot \vec{w})$
Kommutativität	$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$

Hier sind die Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ und die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

Die beiden Verträglichkeiten mit Addition und Zahl-Vektor-Multiplikation gelten auch für das rechte Argument, d. h. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ und $\vec{v} \cdot (\lambda \vec{w}) = \lambda (\vec{v} \cdot \vec{w})$. Dies rechnet man entweder genauso nach oder verwendet Kommutativität.

Beweis. Verträglichkeit mit Addition: Für beliebige Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ berechnen wir:

Hinweis: Zu zeigen ist $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$. Vorgehen: Linke Seite der Gleichung ausschreiben. ausschreiben. Danach rechte Seite ausschreiben. Dann sehen, dass dasselbe herauskommt.

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} =$ ✎

$=$ ✎

$\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} =$ ✎

Verträglichkeit mit Zahl-Vektor-Multiplikation (= skalarer Multiplikation): Vorgehen wie oben. ✎

Der Beweis der Kommutativität geht ähnlich und ist dem Leser überlassen. □