Teil 1 ohne Hilfsmittel: 60 Minuten

Hinweise

Die Resultate sind soweit wie möglich zu vereinfachen. Der Lösungsweg muss ersichtlich sein.

Aufgabe 1 $2+2+2=6$ *Punkte*

Geben Sie für folgende Funktionen die erste Ableitung an und vereinfachen Sie.

a) $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{2x}\right) - 3$ b) $g(t) = \frac{a}{t^3} - 3 \cdot \cos(t)$ c) $h(x) = \sqrt{x} \cdot \ln\left(x^2+1\right)$

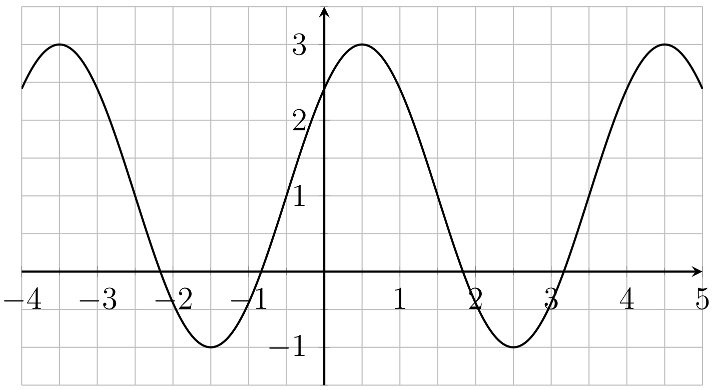
Aufgabe 2 $2+2=4$ *Punkte*

Berechnen Sie:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ b) $\int_{-3}^{3} \left(2t^2 - t\right)\mathrm{d}t$

Aufgabe 3 3 *Punkte*

Geben Sie eine Funktionsgleichung der Funktion mit dem Graphen in der Abbildung rechts an.



Aufgabe 4 $1+1+2+2=6$ *Punkte*

Es wird mit normalen Spielwürfeln gewürfelt (Augenzahlen 1 bis 6). Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

a) mit einem Spielwürfel eine Primzahl zu werfen.

b) mit zwei Spielwürfeln die Summe 2 zu werfen.

c) mit zwei Spielwürfeln die Summe 7 zu werfen.

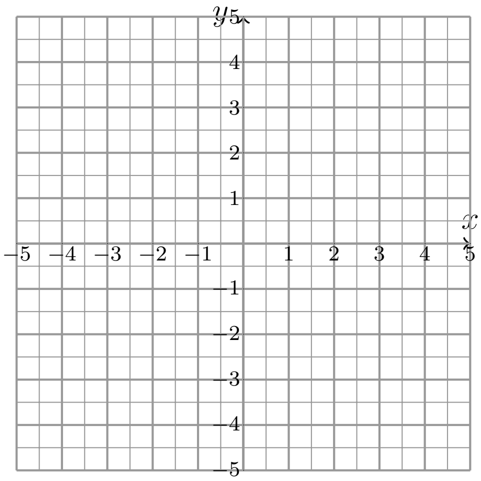
d) mit sechs Spielwürfeln lauter unterschiedliche Augenzahlen zu werfen.

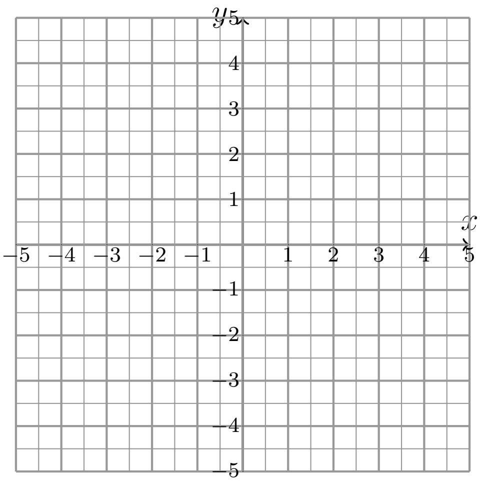
Aufgabe 5 2 *Punkte*

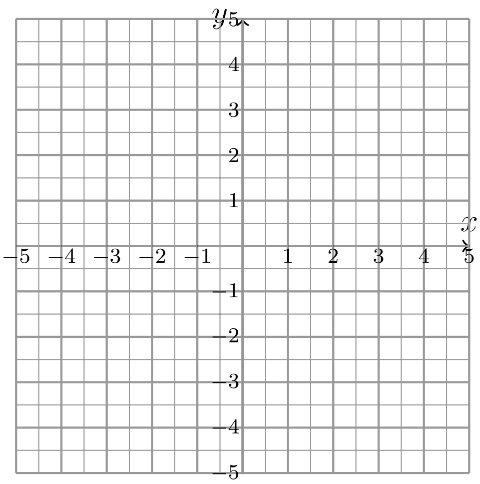
An einem «Schere, Stein, Papier» Turnier (auch Schnick, Schnack, Schnuck oder Ching, Chang, Chong, ...) mit n Teilnehmern spielt jeder gegen jeden genau einmal. Wie viele einzelne Spiele gibt es? Erklären Sie, wie die Lösung hergeleitet werden kann.

Aufgabe 6 $2+2+2=6$ *Punkte*

Skizzieren Sie eine Funktion f für die folgendes gilt: f soll differenzierbar und symmetrisch zur y-Achse sein; ebenfalls ist $f(-2)=1$ und $f'(-2)=-1$ und $f(3)=3$. Skizzieren Sie anschliessend f' und jene Stammfunktion F von f, die durch den Koordinatenursprung verläuft. Verwenden Sie die Koordinatensysteme unten (f ist in der Mitte!). Stellen Sie sicher, dass Symmetrien erkennbar sind.

F:


f:


f':


Aufgabe 7 $1+1+2+2=6$ *Punkte*

Berechnen Sie alle möglichen Lösungen für x resp. für x und y in den nachfolgenden Gleichungen:

a) $3^{7-2x}=243$

b) $\log_4\left(\frac{1}{8}\right)=x$

c) $\tan(3x)=-1$

d) $2x+3y=4$ und $x-2=2y$

Aufgabe 8 $3+3=6$ *Punkte*

Gegeben sind drei Punkte: $A=(2,3,-1)$, $B=(4,1,z)$ und $C=(4,3,1)$.

a) Bestimmen Sie z so, dass $\overline{AB}$ senkrecht zu $\overline{AC}$ verläuft.

b) Bestimmen Sie für $z=-1$ den Punkt D, welcher 4 Einheiten von C in Richtung $\vec{BC}$ entfernt liegt.

Teil 2 mit Hilfsmittel: 150 Minuten

Hinweise

Taschenrechner (Ti-89, TI-*n*spire) und das Fundamentum sind als Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungsidee und der Lösungsweg müssen nachvollziehbar und in mathematischer Notation dokumentiert sein. Für Berechnungen soll der TR vollumfänglich eingesetzt werden. Die TR-Eingabe muss nicht dokumentiert werden.

Überprüfen Sie Ihre Resultate. Wenn diese offensichtlich falsch oder unrealistisch sind, **erklären Sie warum**. Dafür gibt es auch Punkte.

Aufgabe 1

$2+3+3+2+2 = 12$ *Punkte*

Um sich ein genaues Bild des Betäubungsmittelmissbrauchs in der Schweiz zu machen, werden zufällig 20 Personen ausgewählt. Wichtig dabei ist die Alterszusammensetzung der Gruppe. Sie können dabei davon ausgehen, dass die Altersstufen gemäss der nebenstehenden Tabelle in der Schweiz vorkommen. Ebenfalls ist davon auszugehen, dass es gleich viele männliche wie weibliche Bewohner gibt. Jedem Bewohner der Schweiz wird für die Auslosung der Gruppe eine Nummer zugewiesen. Eine Nummer wird zufällig gezogen und ist beim nächsten Ziehen wieder verfügbar («mit Zurücklegen»).

Alter	Personen	Anteil
<5	430'000	5.1%
5-9	420'000	5.0%
10-14	404'000	4.8%
15-19	436'000	5.2%
20-24	496'000	5.9%
25-29	567'000	6.7%
30-34	596'000	7.1%
35-39	590'000	7.0%
40-44	584'000	7.0%
45-49	645'000	7.7%
50-54	669'000	8.0%
55-59	576'000	6.9%
60-64	481'000	5.7%
65-69	430'000	5.1%
70-74	384'000	4.6%
75-79	281'000	3.3%
80-84	215'000	2.6%
85-89	136'000	1.6%
90+	60'000	0.7%
Total	8'402'000	100%

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nur Frauen gezogen werden?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau gleich viele Frauen wie Männer gezogen werden?

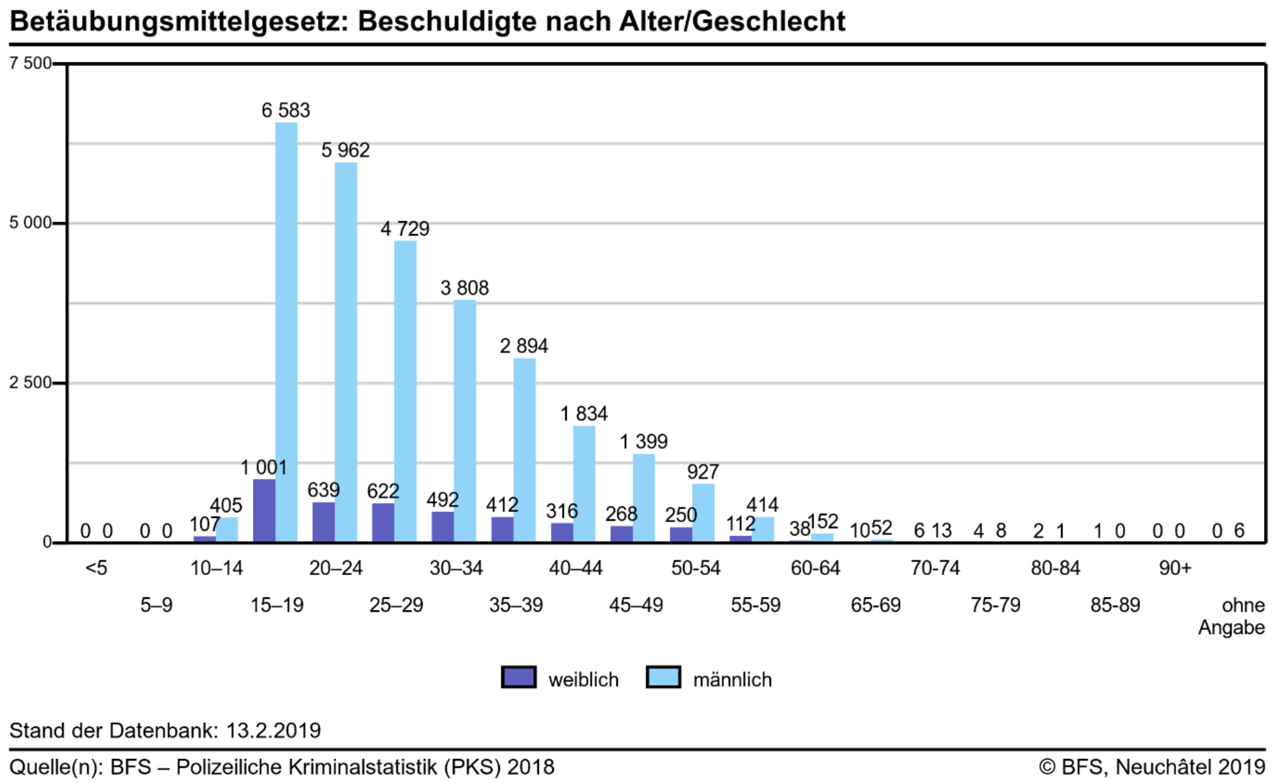
c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Männer in der Mehrheit sind?

d) Beschreiben Sie, wie das erwartete Durchschnittsalter der zufälligen Gruppe berechnet werden könnte. In welcher Altersklasse liegt das Medianalter der Schweiz?

e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass niemand mit Alter 80 Jahren oder mehr in der Gruppe ist?

Aufgabe 2 $2 + 2 = 4$ *Punkte*

Das Bundesamt für Statistik hat in der Kriminalstatistik 2018 folgende Zahlen veröffentlicht. Die notierten Zahlen sind die Anzahl Beschuldigter.



Verwenden Sie für diese Teilaufgaben auch die Tabelle aus der Aufgabe 1.

a) Eine zufällig gezogene Person ist männlich und zwischen 20 und 24 Jahren alt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person beschuldigt ist?

b) Sie ziehen zufällig eine Person. Diese Person ist beschuldigt. Welches ist das wahrscheinlichste Alter? Wieso? Begründen Sie auch mathematisch.

Aufgabe 3 $5 + 3 + 4 = 12$ *Punkte*

Sei die Funktion $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 1$ gegeben.

a) Bestimmen Sie für $a = \frac{4}{3}$ alle Extremalstellen sowie die Gleichung der Wendetangente.

b) Bestimmen Sie a so, dass sich der Graph der Funktion und der ihrer Ableitung berühren und berechnen Sie die Stelle, an welcher sich die beiden Graphen berühren.

c) Für ein allgemeines a, seien x_1 und x_2 die x-Koordinaten der Extremalstellen. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Gerade g durch die Extremalpunkte. Bestimmen Sie dann $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 4 $3+3=6$ *Punkte*

Der Hund eines Zöllners bellt, wenn er Rauschgift erschnuppert. Er entdeckt 98% aller Rauschgift-Schmuggelfälle. In 3% der Fälle bellt der Hund, obwohl kein Rauschgift geschmuggelt wurde. Die Erfahrung zeigt, dass in 1% aller Grenzübertritte Rauschgift geschmuggelt wird.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Hund bellt, wenn er einen zufälligen Grenzgänger beschnuppert?

b) Der Hund bellt bei einem Grenzgänger. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Grenzgänger tatsächlich Rauschgift schmuggelt?

Aufgabe 5 $2+3+3+2=10$ *Punkte*

Das Medikament *Successus forte* wird im Körper abgebaut. Nach 18 h ist noch die Hälfte vorhanden. Man kann davon ausgehen, dass der Abbau exponentiell ist.

a) Wie viel Prozent der ursprünglichen Menge ist nach einem Tag (24 h) noch im Körper?

Falls du in a) keine Lösung gefunden hast, gehe davon aus, dass nach einem Tag noch 41.2% vorhanden sind.

Man verabreicht täglich zur exakt gleichen Zeit 10 mg von *Successus forte*. Die Angabe der Masse des Medikaments im Körper bezieht sich immer auf die Masse unmittelbar vor der nächsten Einnahme.

b) Wie viele Milligramm befinden sich nach 7 Tagen (168 h) im Körper?

c) Wie viele Milligramm befinden sich im Körper, wenn man das Medikament «ewig» nimmt?

d) Das Medikament hat die beste therapeutische Wirkung, wenn man 12 mg im Blut bei «ewigem Nehmen» hat. Wie viel müsste täglich verabreicht werden, um diese 12 mg im Körper zu haben?

Aufgabe 6 $2+3+4=9$ *Punkte*

Wir betrachten die Parabel $p(x) = 3 - x^2$. Der Punkt A liege auf dem Graphen der Parabel oberhalb der x-Achse, B liegt auf der x-Achse mit gleicher x-Koordinate wie der Punkt A. C liegt ebenfalls auf der x-Achse mit x-Koordinate 4.

a) Skizzieren Sie die Situation.

b) Bestimmen Sie A so, dass die Fläche des Dreiecks ABC maximal ist.

c) Bestimmen Sie A so, dass der Winkel $\measuredangle BAC$ minimal ist.

Aufgabe 7 $3+4+1+2=10$ *Punkte*

Gegeben sind die Punkte $A=(-3,2,1)$, $B=(5,-6,5)$, $C=(6,2,10)$ und $D=(2,6,8)$.

a) Zeigen Sie, dass das Viereck $ABCD$ ein gleischenkliges Trapez ist.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden $g=(AC)$ und $h=(BD)$.

c) Berechnen Sie den Schnittwinkel $\sphericalangle(g,h)$.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$.

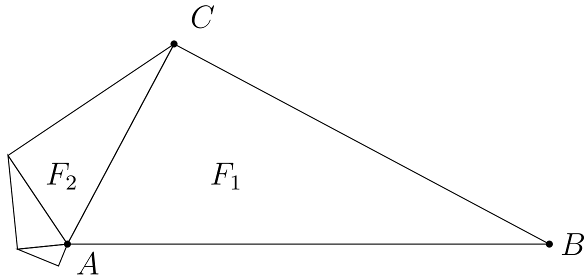
Aufgabe 8 $1+2+3+2=8$ *Punkte*

Gegeben ist ein Dreieck F_1 mit den Seiten $a = 7.5$, $b = 4$ und $c = 8.5$. Beantworten Sie die Fragen a) und b) ohne trigonometrische Funktionen.

a) Weisen Sie nach, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

b) Berechnen Sie die Höhe h_c

Das Dreieck $F_1 = ABC$ wird im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel BAC um den Punkt A gedreht und um den Faktor $\frac{8}{17}$ ebenfalls von A aus gestreckt. Mit dem daraus entstandenen Dreieck F_2 wird gleich verfahren. Dies wird unendlich oft wiederholt. Unten sind die ersten vier Dreiecke illustriert.



c) Wie gross ist die Fläche des n-ten Dreiecks? Wie gross ist die Summe der Flächen aller Dreiecke?

d) Welches ist das erste Dreieck, das über dem ursprünglichen Dreieck ABC liegt?

Aufgabe 9 $2+5=7$ *Punkte*

Von einem Würfel $ABCDEFGH$ sind die Punkte $C = (-5,\ 34,\ -22)$, $D = (-21,\ 10,\ -25)$ und $E = (-30,\ 11,\ 15)$ gegeben. Die Punkte A, B, C, D und E, F, G, H bilden jeweils übereinander liegende Quadrate mit gleichem Umlaufsinn (z.B. sind die Punkte A und E benachbart). Die Vektoren $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AE}$ bilden ein Rechtssystem.

a) Weisen Sie nach, dass die drei gegebenen Punkte auch wirklich Teil eines Würfels sein können.

b) Berechnen Sie die fehlenden Punkte des Würfels.