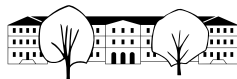


Inhaltsverzeichnis

1	Trigonometrie	2
	A1	2
	A2	2
	A4	2
	A6	2
	A7	2
	A8	2
	A9	2
2	Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit	2
	A1	2
	A2	2
	A3	3
	A4	3
	A5	3
3	Differential- und Integralrechnung	3
3.1	Ohne Hilfsmittel	3
	A1	3
	A2	4
	A3	4
	A5	4
	A6	4
3.2	mit Hilfsmittel	4
	A1	4
	A2	4
	A3	5
	A4.1	5
	A4.2	5
	A4.3	5
4	Exponentialfunktionen	6
	A1	6
	A2	6
	A3	6
	A4	6
	A5	6
5	Folgen und Reihen	6
	A1	6
	A2	7
	A3	7
	A4	7
	A5	7
	A6	7
	A7	7



1 Trigonometrie

A1

$$f'(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

A2

Amplitude 2, Nullphase $-\frac{\pi}{2} = -90^\circ$, Periode $\frac{4\pi}{3}$.

$$f(x) = 2 \sin\left(2\pi \cdot \frac{x}{\frac{4\pi}{3}} - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(x \cdot \frac{3}{2} - \frac{\pi}{2}\right).$$

A4

Amplitude 3, Nullphase $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$, Periode π .

$$f(x) = 3 \sin\left(2\pi \cdot \frac{x}{\pi} + \frac{\pi}{6}\right) = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

A6

i) 2280.406 m

ii) 39.6927°

A7

Amplitude: 0.4, Offset 0.5, Periode 12, Nullphase 0° (weil 3 Monate später, $\frac{1}{4}$ Periode).

$$f(t) = 0.4 \sin\left(\frac{2\pi}{12} \cdot t\right) + 0.5$$

März: $t = 8$, $f(8) \approx 0.1536$, also gut 15%.

A8

$$b) a = 1.5, b = \frac{1}{2}, c = \frac{4\pi}{6}.$$

A9

Amplitude 2, Offset 1, Periode 4, Nullphase $90^\circ = \frac{\pi}{2}$.

$$f(x) = 1 + 2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{4} \cdot x + \frac{\pi}{2}\right)$$

2 Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit

A1

Total mögliche Gruppen: $\binom{24}{4}$

$$a) \frac{\binom{13}{4}}{\binom{24}{4}}$$

$$b) \frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{11}{3}}{\binom{24}{4}}$$

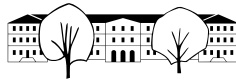
$$c) \frac{\binom{13}{2} \cdot \binom{11}{2}}{\binom{24}{4}}$$

A2

$$a) 15^4$$

$$b) \binom{4}{2} 9^2 \cdot 6^2 \text{ (Position der Zahlen, mal mögliche Zahlen, mal mögliche Buchstaben)}$$

$$c) \binom{5}{4} \cdot 3^4 \cdot 4! \text{ (Auswahl der Zeilen (ungeordnet), mal Auswahl in einer Zeile, mal Vertauschungen der Zeilen)}$$



d) $6 \cdot 4 \cdot \binom{6}{2}$ (Auswahl des Buchstabens, mal Position des Buchstabens, mal Möglichkeiten für Quersumme 7). Dazu stellt man sich 7 Kreise mit 6 Trennwänden dazwischen vor. Daraus liest man 2 Trennwände aus. Die Anzahl durch die Wände getrennten Kreise geben die Ziffern mit Quersumme 7 an.

A3

$p = P(\text{Sohn gewinnt})$. Damit ist $P(\text{Sohn gewinnt keines von 2 Spielen}) = (1 - p)^2 = 1 - 0.84 = 0.16$.
Damit ist $1 - p = \sqrt{0.16}$ und $p = 1 - 0.4 = 0.6$.

A4

- a) $7! \cdot 7^7$
- b) $7! \cdot 7!$
- c) $7! \cdot \binom{7}{2} \cdot 5 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 3!}$

A5

Die Anzahl ausgeführter Schritte ist jeweils eine Binomialverteilte Zufallsvariable.

Käfer A: $X \sim \text{Bin}(10, 0.8)$

Käfer B: $Y \sim \text{Bin}(10, 0.6)$

- a) $P(X \geq 9) = \binom{10}{1} 0.8^9 \cdot 0.2 + 0.8^{10} \approx 0.37581$
- b) $E(Y) = np = 10 \cdot 0.6 = 6$ Schritte, also $6 \cdot 4 \text{ mm} = 24 \text{ mm}$.
Standardabweichung in Schritten: $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0.6 \cdot 0.4} \approx 1.5492$, also $\approx 6.1968 \text{ mm}$.
- c) Die Käfer sind bei 0, 12, oder 24 mm. $P(X = 0, Y = 0) + P(X = 4, Y = 3) + P(X = 8, Y = 6) = P(X = 0) \cdot P(Y = 0) + \dots \approx 0.07598$.

3 Differential- und Integralrechnung

3.1 Ohne Hilfsmittel

A1

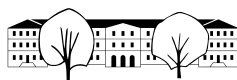
a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos(x) + \sin(x))(\sin(x) + \cos(x)) - (\sin(x) - \cos(x))(\cos(x) - \sin(x))}{(\sin(x) + \cos(x))^2} = \\ &= \frac{1 + 2 \sin(x) \cos(x) + (1 - 2 \sin(x) \cos(x))}{(\sin(x) + \cos(x))^2} = \\ &= \frac{2}{(\sin(x) + \cos(x))^2} \end{aligned}$$

Man könnte $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ schreiben und damit weiter vereinfachen (Überlagerung von Schwingungen).

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \\ &= \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = -(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$



A2

- a) Genau 1 Schnittpunkt, d.h. $f(x) = g(x)$ hat genau eine Lösung. Liefert $m = \pm 1$.
 b) Senkrechte Steigungen haben Produkt -1 . D.h. im Schnittpunkt (x -Koordinate) x_p muss $m \cdot h'(x_p) = -1$ sein. Lösung $m = 1$.

c) $\int_0^{x_p} i(x) - f(x) dx = 36$ mit x_p Schnittpunkt (x -Koordinate) als Ausdruck mit m . Liefert $m = 6$.

Mit Skizze sieht man sofort ein, dass auch $m = -6$ eine Lösung ist, allerdings erhält man die Fläche -36 . Korrekterweise müsste man den Betrag der Differenz der Funktionen betrachten.

A3

- a) Logarithmen nur für positive Argumente definiert, also für $x > 2$.

$$\begin{aligned} \log(x+2) + \log(x-2) &= \\ \log((x+2)(x-2)) &= 0 & |10^{(\cdot)} \\ x^2 - 4 &= 1 \\ x &= \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

Probe: Es muss $x > 2$ sein, also ist nur $x = \sqrt{5}$ eine Lösung.

b) $f'(x) = 2 \cdot e^{-2x} + (2x+1) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = -4xe^{-2x}$

$f''(x) = -4e^{-2x} + -4xe^{-2x} \cdot (-2) = e^{-2x} \cdot (8x-4)$

$f''(\ln(2)) = e^{-2\ln(2)} \cdot (8\ln(2)-4) = \frac{1}{4} \cdot (8\ln(2)-4)$

A5

$f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2 + 2$

A6

- a) Arithmetische Reihe: $20 \cdot \frac{1}{2}(18+37) = 10 \cdot 55 = 550$ pro Sektor, also $30 \cdot 550 = 16500$ total.

- b) $l = 100$

3.2 mit Hilfsmittel

A1

- a) Punkt $C = (1, 0)$, $f'(1) = 4$, d.h. $\tan(\gamma) = 4$, $\gamma \approx 75.9638$

- b) $g(x) = 11.5 - x$, $f(x) = g(x)$ liefert $x \in \{-0.5, 8\}$, also $S = (8, 3.5)$.

c) $\int_1^8 f(x) dx + \frac{1}{2} \cdot 3.5^2 \approx 25.8072$ [ha].

d) $P_1 = (5.5, 0)$, Gleichung $h(x) = \frac{3.5}{2.5}(x - 5.5)$

e) Stellgrösse: x -Koordinate von B : x_B . y -Koordinate $y_B = f(x_B) = 4 - \frac{4}{x_B}$.

Längenquadrat $l(x_B) = (4 - x_B)^2 + y_B^2 = (4 - x_B)^2 + (4 - \frac{4}{x_B})^2$.

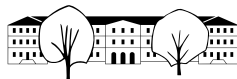
$l'(x_B) = 0$ liefert $x_B = \pm 2$. Die negative Lösung ist nicht Lösung zu unserem Problem.

$l''(2) = 0$. Es könnte sich um einen Sattelpunkt handeln. Probe am Rand des Definitionsbereichs: $l(1) = 9$, $l(2) = 8$, $l(8) = 28.25$, also ist $x_B = 2$ wirklich die gesuchte Stelle für das Minimum. Die Kanallänge ist also $\sqrt{l(2)} = 2\sqrt{2} \approx 2.828 \cdot 100 \text{ m} = 282.8 \text{ m}$.

A2

- a) Maximum in $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3^{\frac{3}{2}}})$, also Breite $\frac{4}{3^{\frac{3}{2}}} \approx 0.7698$.

b) $2 \int_0^1 f(x) dx = \frac{8}{15}$.



c) $\pi \int_0^1 f(x)^2 dx = \frac{\pi}{12} \approx 0.2618$

d) $f'(1) = -1$, also 90° .

A3

a) $V(r, h) = \frac{2\pi r^3}{3} + \pi h r^2$, $V(2.5, 9.5) \approx 219.257$

b) Ja.

c) $S(r, h) = \pi r^2 + 2\pi r h + 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{2}$

d) Stellgrösse r . Aus $V(r, h) = 175$ erhält man nach h aufgelöst: $h_r = -\frac{2\pi r^3 - 525}{3\pi r^2}$.

Zu optimierende Funktion $f(r) = S(r, h_r) = 3\pi r^2 - \frac{2(2\pi r^3 - 525)}{3r^2}$.

$f'(r) = 0$ liefert als einzige positive Lösung $r_{min} \approx 2.52608$.

$f''(r_{min}) \approx 70.42 > 0$, also ein Minimum.

$h_{min} = 7.0455$, mit einer Oberfläche von ≈ 104.4087 .

A4.1

b) $\alpha = 54.73561^\circ$.

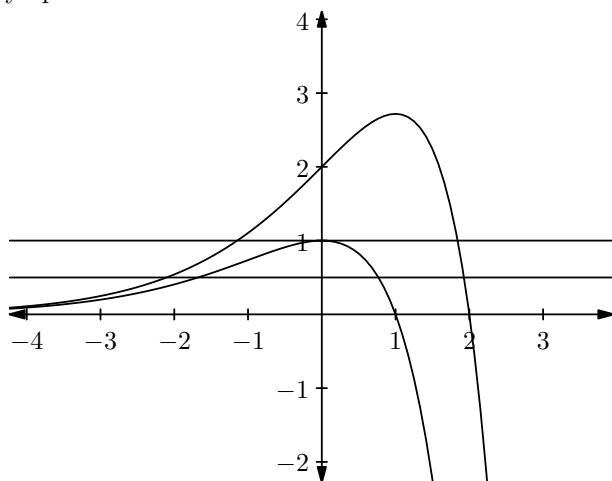
A4.2

a) Nullstelle für $x = t$

Extremalstelle für $x = t - 1$ mit $f''(t - 1) = -e^{t-1} < 0$, also ein Maximum.

Wendestellenkandidat für $x = t - 2$ mit $f'''(t - 2) = -e^{t-1} \neq 0$, also eine echte Wendestelle.

Asymptoten: x -Achse wenn $x \rightarrow \infty$.



b)

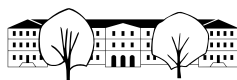
A4.3

a) Volumen $\int_0^h \pi \cdot f(x)^2 dx = 500$ liefert $h \approx 15.01487$

b) Parabelfunktion mit Scheitel in $(0, h)$ und Nullstellen $(\pm b, 0)$: $f(x) = h - h \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2$.

Fläche: $2 \cdot \int_0^b f(x) dx = \frac{2bh}{3}$.

Volumen: $\frac{2bhl}{3}$.



4 Exponentialfunktionen

A1

Funktionen $A(t)$, $B(t)$ geben den Anteil bedeckter Seefläche nach t Tagen an. Sei F_0 die bedeckte Fläche zur Zeit $t = 0$.

$$A(t) = F_0 \cdot 2^{\frac{t}{4}} \quad B(t) = F_0 \cdot 2^{\frac{t}{7}}$$

F_0 erfüllt die Gleichung $A(28) = \frac{1}{2}$, daraus ergibt sich $F_0 = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$.

a) $B(28) = \frac{1}{16}$

b) Das gesuchte t erfüllt $A(t) + B(t) = 1$, TR liefert $t \approx 31.4677$.

A2

a) $A: t \approx 3.10628$ und $B: t \approx 4.67017$.

c) $A: t \approx 8.50179$ und $B: t \approx 5.38005$.

d) $t \approx 14.7024$

e) $N'_B(0) \approx 133.57$ mg / h. $N'_A(t) = 133.57$ liefert $t \approx 3.09569$

A3

a) In 12 Stunden verdoppelt sich A vier mal, also eine versechszehnfachung. A wächst also schneller. Alternativ beide Exponentialfunktionen mit gleicher Basis schreiben.

b) t in Stunden ab 1.00 Uhr.

$$A(t) = 10'000 \cdot 2^{\frac{t}{3}} \quad B(t) = 13'000 \cdot 10^{\frac{t-1}{12}}$$

$A(t) = B(t)$ liefert $t \approx 1.79953$, d.h. um ca. 2.48 Uhr

A4

Anzahl Zeilen: n

W'keit $p(n) = 0.9^{\frac{n}{10}}$.

a) $p(1) \approx 0.989519$

b) $p(n) = 0.5$ liefert $n \approx 65.7881$

A5

a) $x(x+3) = 10$ liefert $x = 2$ oder $x = -5$.

b) $\log_2(x) = 6$, also $x = 2^6 = 64$.

c) $\log_2(x+9) = \log_2(2^4 \cdot (x-6))$, liefert $x = 7$.

d) $7 - 2x = 5$ liefert $x = 1$.

e) $x = \frac{\log_2(2^{-3})}{\log_2(4)} = \frac{-3}{2}$.

5 Folgen und Reihen

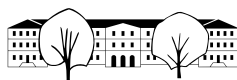
A1

a) $U_1 = 6$, $U_2 = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot U_1 = 10$, $U_3 = \frac{5}{3} \cdot U_2 = \frac{50}{3}$.

$$U_n = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} \cdot 6.$$

b) $A_2 = \frac{5}{9} A_1 = \frac{10}{9}$, $A_3 = \frac{5}{9} A_2 = \frac{50}{81}$.

$$A_n = \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} \cdot 2.$$

**A2**

a) $C = (5, 0)$.

b) $Q_n = Q_1 \cdot \left(\left(\frac{4}{5}\right)^2\right)^{n-1} = Q_1 \cdot \left(\frac{16}{25}\right)^{n-1}$.

$$\sum_{i=1}^n Q_i = Q_1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{16}{25}} = \frac{25}{9}.$$

Alternative: Von jedem Trapez nimmt das Quadrat $\frac{8}{9}$ der Fläche ein, also auch vom ganzen Dreieck mit Fläche $\frac{25}{8}$.

A3

Arithmetische Reihe mit erstem Element 18, letztes Element 37, 20 Elemente.

Summe: $\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (18 + 37) = 10 \cdot 55 = 550$.

A4

$$1 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7 + 7 + \dots + 15 + 15 + 16 = 1 + 3 + 16 + 2 \cdot (4 + 5 + 6 + \dots + 15) = 20 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (4 + 15) = 20 + 12 \cdot 19 = 20 + 228 = 248.$$

A5

$$a_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{3}a_1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}a_1\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{9}a_1^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}a_1$$

$$a_n = a_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{n-1}$$

$$V_n = a_n^3 = a_1^3 \cdot \left(\frac{5\sqrt{5}}{27}\right)^{n-1}$$

a) Summe: $V = a_n^3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{5\sqrt{5}}{27}} \approx 1.70674a_1^3$.

b) $h_n = \sum_{i=1}^n a_i = V_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ mit $q = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Wir suchen $\frac{1}{1-q} - \frac{1-q^n}{1-q} < 0.0001$. TR liefert $n \approx 35.9934$, also n mindestens 36.

A6

a) $R_n = 0.96^{n-1} \cdot R_1$

$$\sum_{i=1}^{\infty} R_i = R_1 \cdot \frac{1}{1-0.96} = \pi 1.1^2 \cdot 25 \approx 95.0332$$

b) $S_n = \sum_{i=1}^n R_i = R_1 \cdot \frac{1-0.96^n}{1-0.96}$

c) $r_n = \sqrt{\frac{S_n}{\pi}} = \sqrt{\frac{R_1}{\pi} \cdot \frac{1-0.96^n}{1-0.96}} = c \cdot \sqrt{1-0.96^n}$, mit $c \in \mathbb{R}$.

d) Nicht geometrisch, wegen der Differenz unter der Summe nicht zu $c \cdot q^n$ umformbar.

e) S_{∞} ist maximale Kreisfläche, also $r_{\infty} = 5.5$.

A7

Arithmetische Reihe, erstes Element 53, letztes Element 171, Differenz 2

a) Anzahl Elemente $(171 - 53)/2 + 1 = 118/2 + 1 = 59$

b) Summe: $58 \cdot \frac{1}{2} (53 + 171) = 29 \cdot 224 = 6496$.