Lösung zu Aufgabe 22.19 ex-binoialkoeffizienten-zusammenfassen

Für diese Aufgaben werden die bereits bewiesenen Formeln (i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ und (ii) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ benötigt.

a) (ii): $\binom{7}{3} + \binom{7}{3} = \binom{8}{4}$

b) (i): $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$ und mit (ii): $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$

c) Mit (ii): $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}$ gilt $\binom{6}{3} - \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$

d) Mit (ii): $\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1}$ gilt $\binom{10}{6} + \binom{9}{4} = \binom{10}{6} + \binom{9}{5} = \binom{9}{6}$

Lösung zu Aufgabe 22.20 ex-varmit-anzahl-teiler

a) Jeder Teiler von $n = 3^8 \cdot 5^{11}$ hat die Form $3^a \cdot 5^b$, wobei $a, b \in \mathbb{N},\ a \leq 8,\ b \leq 11$. a kann somit $(8+1)$ verschiedene Werte annehmen, b kann $(11+1)$ verschiedene Werte annehmen. Somit besitzt die Zahl $n = 3^8 \cdot 5^{11}$ genau $(8+1) \cdot (11+1) = 108$ unterschiedliche natürliche Teiler.

b) $4000 = 2^5 \cdot 5^3$. Somit ist die Anzahl natürlicher Teiler $(5+1) \cdot (3+1) = 24$.

c) $2100 = 7 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 2^2$. Somit ist die Anzahl natürlicher Teiler $(1+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) \cdot (2+1) = 36$.

d) $10^m = 2^m \cdot 5^m$. Somit ist die Anzahl natürlicher Teiler $(m+1)^2$

Lösung zu Aufgabe 22.21 ex-anzahl-natuerliche-loesungen-einer-gleichung

a) Wenn in $1 + 1 + ... + 1 = 14$ zwei der dreizehn Pluszeichen „gelöscht“ werden, erhalten wir eine mögliche Lösung. Daraus folgt die Anzahl Lösungen insgesamt: $\binom{13}{2} = 78$.

b) Werden bei einer Reihe von vierzehn 1 zwei Trennstriche eingefügt, können Lösungen in $\mathbb{N}_0$ dargestellt werden. Auf sechzehn Plätze werden also zwei Trennstriche eingefügt: $\binom{16}{2} = 120$.

Lösung zu Aufgabe 22.22 ex-comb-schuelerauswaehlen-mit-bedingungen

a) $\binom{24}{7} = 346'104$

b) Wenn Emma dabei ist, müssen noch sechs Mitglieder aus den verbleibenden 23 ausgewählt werden: $\binom{23}{6} = 100'947$.

c) Wenn Luca nicht dabei sein soll, stehen nur 23 Personen zur Auswahl: $\binom{23}{7} = 245'157$.

d) Luca und Emma sind dabei, es müssen noch fünf gewählt werden: $\binom{22}{5} = 26'334$.

Lösung zu Aufgabe 22.23 ex-varohne-woerter-mit-bedingungen

Es gibt 21 Konsonanten und 5 Vokale, die auf die Plätze zu verteilen sind: $21 \cdot 5 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 5 \cdot 21 = 4'862'025$.

Lösung zu Aufgabe 22.24 ex-combohne-mit-bedingungen-halbklassen-bilden

a) Wähle fünf aus zehn Schülerinnen und fünf aus zehn Schülern:
$\binom{10}{5} \cdot \binom{10}{5} = \binom{10}{5} \cdot \binom{10}{5} = 63'504$.

b) Wähle sechs aus zwölf Schülerinnen und fünf aus zehn Schülern:
$\binom{12}{6} \cdot \binom{10}{5} = \binom{12}{6} \cdot \binom{10}{5} = 232'848$.

Lösung zu Aufgabe 22.25 ex-comb-personen-in-zimmer-verteilen

Es wird davon ausgegangen, dass die beiden Zweierzimmer unterscheidbar sind.

Ohne Einschränkungen gibt es $\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} = P_7(2,2,3) = 210$ mögliche Zimmerbelegungen (Multiplikation der Möglichkeiten, das erste, zweite Zweierzimmer und dann das Dreierzimmer zu belegen.

Sind Anja und Tanja beide im ersten Zwierzimmer, gibt es $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} = 10$ mögliche Zimmerbelegungen. Sind die beiden im zweiten Zweierzimmer, gibt es ebenfalls 10 Möglichkeiten.

Sind die beiden im Dreierzimmer gibt es $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = 30$ mögliche Belegenungen. Somit gibt es total $210 - 20 - 30 = 160$ mögliche Zimmerbelegungen, in denen Anja und Tanja nicht im gleichen Zimmer schlafen.