b) Für jeden Wurf 6 Möglichkeiten, also total 6^{10} Möglichkeiten.

Lösung zu Aufgabe 22.7 ex-kombination-intro

a) Man bildet zuerst geordnete 3er-Gruppen, d.h. Variationen ohne Wiederholung. Man dividiert dann durch die Anzahl Mehrfachzählungen, also die Permutation der 3 Personen. Als Resultat: $\frac{25!}{22!} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{25!}{22! \cdot 3!} = 2300$

b) Man betrachtet wieder erst die Variation ohne Wiederholung, d.h. auf wie viele Arten man 3 (vorerst unterscheidbare) Köpfe auf 50 Positionen verteilen kann. Danach dividiert man wieder durch die Anzahl Mehrfachzählungen, d.h. die Anzahl Permutation von 3 Objekten. Resultat: $\frac{50!}{47!} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{50!}{47! \cdot 3!} = 19600$.
Bei 25 Köpfen sind es total $\frac{50!}{25! \cdot 25!} = 126'410'606'437'752 \approx 1.3 \cdot 10^{14}$ Möglichkeiten.
Insgesamt gibt es $2^{50} = 1'125'899'906'842'624 \approx 1.1 \cdot 10^{16}$ Möglichkeiten.

c) $\frac{36!}{27! \cdot 9!} = 94'143'280$ Möglichkeiten.

Lösung zu Aufgabe 22.10 ex-eigenschaften-binomialkoeffizient

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.
Variante algebraisch: Man potenziert das Binom $(1+1)^n$ aus und erhält so die Summe aller Binomialkoeffizienten mit fixem n.
Variante kombinatorisch: Man betrachtet alle Variationen mit Wiederholung für die Besetzung von n geordneten Plätzen mit Nullen und Einsen. Davon gibt es 2^n. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt an, wie viele davon genau k Nullen haben (d.h. auf wie viele Arten man k Plätze für die Nullen auswählen kann). Die Summe aller dieser Möglichkeiten muss also 2^n sein.

b) $\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
Variante algebraisch:

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} = \frac{n! \cdot (k+1)}{(n-k)!(k+1)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{n! \cdot (k+1+n-k)}{((n+1)-(k+1))! \cdot (k+1)!} = \frac{(n+1)!}{((n+1)-(k+1))! \cdot (k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Variante kombinatorisch:
Um $k+1$ Elemente aus $n+1$ auszuwählen, können wir zwei Gruppen von Kombinationen unterscheiden: Jene, die das letzte Element enthalten, und jene, die es nicht enthalten.
Für diejenigen, die das letzte Element enthalten, müssen von den n verbleibenden Elementen noch k Elemente ausgewählt werden. Dafür gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten.
Für diejenigen, die das letzte Element nicht enthalten, müssen von den n verbleibenden Elementen $k+1$ Elemente ausgewählt werden. Dafür gibt es $\binom{n}{k+1}$ Möglichkeiten.

c) Variante algebraisch:
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$.
Variante kombinatorisch:
Wählt man k Objekte aus n aus, hat man damit automatisch auch $n-k$ Objekte nicht ausgewählt. Dafür gibt es natürlich gleich viele Möglichkeiten.

Lösung zu Aufgabe 22.11 ex-kombination-mit-wiederholung
Drei gleiche Farben: RRR, GGG, BBB
Zwei gleiche Farben: RRG, RRB, GGR, GGB, BBR, BBG
Unterschiedliche Farben: RGB
Total 10 Möglichkeiten.

Lösung zu Aufgabe 22.14 ex-varohne-telefonnummern