22 Kombinatorik: Die Kunst des Zählens

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit der «abzählenden Kombinatorik».

> Diese beschäftigt sich mit der Bestimmung der Anzahl möglicher Anordnungen oder Auswahlen
>
> - unterscheidbarer oder nicht unterscheidbarer Objekte (d.h. „ohne“ bzw. „mit“ Wiederholung derselben Objekte) sowie
> - mit oder ohne Beachtung ihrer Reihenfolge (d.h. „geordnet“ bzw. „ungeordnet“).
>
> Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Abz%C3%A4hlende_Kombinatorik, 27. 9. 2019

Dafür gibt es eine Sammlung von Formeln. Der Fokus liegt aber darauf, diese Formeln intuitiv zu verstehen und von Fall zu Fall herleiten zu können. Nur so können dann auch komplexere Probleme erfolgreich gelöst werden.

22.1 Permutationen

Permutationen sind zwar ein Spezialfall. Wenn diese aber verstanden sind, können diese mit wenig Aufwand verallgemeinert werden.

Aufgabe 22.1

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3-stellige Zahlen zu schreiben, in denen die Ziffern 1, 2, 3 je genau einmal vorkommen? Schreiben Sie alle Möglichkeiten systematisch auf.

b) Gleiche Frage mit 4-stelligen Zahlen und Ziffern 1, 2, 3, 4?

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es 10 nummerierte Parkplätze 10 Mietern zuzuordnen?

d) Auf wie viele Arten können die Schülerinnen und Schüler einer Klasse mit n Personen durchnummeriert werden?

Definition 22.1.1 n-Fakultät: $n!$

Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man die Fakultät von n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \qquad \text{(gesprochen } n\text{-Fakultät)}$$

mit dem Spezialfall 0!=1.

Hinweis: Auf Englisch bzw. Französisch spricht man von «n factorial» bzw. «n factorielle», was (zumindest für mich) mehr Sinn macht, als «Fakultät». Laut Wikipedia wird z.T. in Österreich der Begriff «die Faktorielle» verwendet.

Merke 22.1.2 Fakultäten auf dem TR

Mit dem Ausrufezeichen «!» können mit dem TR Fakultäten berechnet werden.
TI-92 Plus: Via «MATH»: `2nd` `5` `7` `1`
TI-$n$spire: `menu` `5` `1`

Merke 22.1.3 Anzahl Permutationen

Es gibt $n!$ verschiedene Permutationen (Vertauschungen) von n unterscheidbaren Objekten.
Bei einer Permutation ist die Reihenfolge der Objekte wichtig, die Objekte sind unterscheidbar und es gibt keine Wiederholungen.