Kombinatorik Nr. 1

Aussprache und Berechnung von

$n!$

Kombinatorik Nr. 1

Kombinatorik Nr. 2

Anzahl möglicher Buchstabenfolgen der Länge n
mit genau n verschiedenen gegebenen Buchstaben.

Erklärung der Formel?

Fachbegriff?

Kombinatorik Nr. 2

Kombinatorik Nr. 3

Anzahl möglicher Buchstabenfolgen der Länge n, wobei aus k verschiedenen Buchstaben jeder Buchstabe beliebig oft vorkommen darf.

Erklärung der Formel?

Kombinatorik Nr. 3

Kombinatorik Nr. 4

Anzahl möglicher Buchstabenfolgen der Länge n,
wobei jeder Buchstabe höchstens einmal vorkommen darf.
Auswahl aus k Buchstaben (mit $k \geq n$).

Erklärung der Formel?

Kombinatorik Nr. 4

Kombinatorik Nr. 5

Anzahl der Buchstabenfolgen, in denen alle Buchstaben des Wortes **ANANAS** (in derselben Häufigkeit wie in diesem Wort) vorkommen.

Erklärung der Formel?

Kombinatorik Nr. 5

Kombinatorik Nr. 6

Anzahl Möglichkeiten, eine ungeordnete Gruppe der Grösse k aus n Objekten zu bilden.

Erklärung der Formel?

Kombinatorik Nr. 6

Kombinatorik Nr. 7

Warum gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Kombinatorik Nr. 7

Kombinatorik Nr. 8

Warum gilt:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Kombinatorik Nr. 8

Kombinatorik Nr. 9

Früher mussten im Schweizer Zahlenlotto für einen Tipp sechs Zahlen aus 45 Zahlen angekreuzt werden.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, genau fünf Richtige anzukreuzen?

Kombinatorik Nr. 9

Kombinatorik Nr. 10

52 Pokerkarten, 4 Farben. Es werden 5 Karten gezogen.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass 4 gleiche Werte darunter sind?

Kombinatorik Nr. 10

Anzahl Permutationen: $n!$

Möglichkeiten den ersten Platz zu besetzen: n.
Für jede dieser Möglichkeiten gibt es noch $(n-1)$ Möglichkeiten, den zweiten Platz zu besetzen.
Entsprechend $(n-2)$ Möglichkeiten für den dritten Platz etc.

n Fakultät

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

$n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Erste Position: n Möglichkeiten.
Zweite Position: $n-1$ Möglichkeiten.
Letzte Position: $n-k+1$ Möglichkeiten.

$$k^n$$

Für jede Position kann aus k Buchstaben ausgewählt werden. Und das n mal hintereinander.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Aus n Objekten sind k auszuwählen. Das ist dasselbe, wie eine Ziffernfolge aus k Einsen (Objekt an dieser Stelle wird gewählt) und $n-k$ Nullen (Objekt an dieser Stelle wird nicht gewählt) zu bilden. Dafür gibt es $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ Möglichkeiten.

$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 3}{2} = 45$

Zuerst alle Buchstaben als unterschiedlich betrachten: 6! Möglichkeiten.
Mehrfachzählungen berücksichtigen: Alle Vertauschungen der drei 'N': «3! mal zu viel gezählt.» Etc.

$\binom{n+1}{k+1}$ zählt die Anzahl Möglichkeiten, aus $n+1$ Objekten $k+1$ auszuwählen.
Diese Möglichkeiten können in zwei Gruppen aufgeteilt werden: Jene, die ein bestimmtes Objekt enthalten, und jene, die dieses Objekt nicht enthalten.
Für die erste Gruppe müssen aus den verbleibenden n Objekten noch k ausgewählt werden. Für die zweite Gruppe wählt man $k+1$ Objekte aus den verbleibenden n Objekten aus.

$\binom{n}{k}$ zählt die Anzahl aller Zeichenfolgen aus '0' und '1' der Länge n, die genau k mal das Zeichen '1' enthalten.
Die Summe zählt alle möglichen Zeichenfolgen mit beliebiger Anzahl '1' und '0' der Länge n.
Andere Zählvariante: Mit zwei Möglichkeiten je Position ergeben sich total 2^n Möglichkeiten.

Total Möglichkeiten $\binom{52}{5}$.
Anzahl Möglichkeiten für Wert des Vierers: 13.
Anzahl Möglichkeiten für fünfte Karte: 48

$$P(\text{vier gleiche Werte}) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}}$$

Anzahl mögliche Tipps: $\binom{45}{6}$.
Anzahl Möglichkeiten für genau 5 richtige:
5 «richtige» Zahlen aus 6 und
eine «falsche» aus 39, also

$$\frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{39}{1}}{\binom{45}{6}}$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung Nr. 1

Wenn A und B unabhängige Ereignisse sind.
Welche Bedeutung haben die folgenden Ausdrücke, wie berechnet man sie aus $P(A)$ und $P(B)$?

$$P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B)$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung Nr. 1

Wahrscheinlichkeitsrechnung Nr. 2

Was bedeutet

$$P(\overline{A}) = ?$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung Nr. 2

Wahrscheinlichkeitsrechnung Nr. 3

$$P(A \mid B) = ?$$

Formel, Sprechweise/Bedeutung, Begründung der Formel.

Wahrscheinlichkeitsrechnung Nr. 3

Wahrscheinlichkeitsrechnung Nr. 4

Vierfeldtafel (in 9 Feldern) mit Ereignissen A und B.

Wahrscheinlichkeitsrechnung Nr. 4

Wahrscheinlichkeitsrechnung Nr. 5

Binomialverteilung: Notation und Definition

Wahrscheinlichkeitsrechnung Nr. 5

Wahrscheinlichkeitsrechnung Nr. 6

Erwartungswert und Standardabweichung einer binomial verteilten Zufallsvariablen

$$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung Nr. 6

Statistik Nr. 1

Mittelwert und empirische Standardabweichung der Messwerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Notation und Verwendung Summenzeichen.

Statistik Nr. 1

Statistik Nr. 2

Schätzung für die Standardabweichung des Mittelwerts $\overline{x}$ aus s und n (= Anzahl der Messwerte).

Ungefähres 95%-Konfidenzintervall.

Anzahl der dafür nötigen Messwerte n?

Statistik Nr. 2

Statistik Nr. 3

Definition vom Median $\tilde{x}$.

Vorteile gegenüber Mittelwert $\overline{x}$. Beispiel?

Statistik Nr. 3

Statistik Nr. 4

Definition 1. Quartil.

Statistik Nr. 4

Die Wahrscheinlichkeit, dass A nicht eintritt. ($\overline{A}$ ist das Gegenereignis)

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse, also sowohl A als auch B, eintreffen.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ist die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B oder beide eintreffen.

	A		Σ
B	$P(B \cap A)$	$P(B \cap \overline{A})$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(\overline{B} \cap A)$	$P(\overline{B} \cap \overline{A})$	$P(\overline{B})$
Σ	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit: Wahrscheinlichkeit dass A eintritt, wenn man weiss, dass B eingetreten ist.
Umgeformt ist das die übliche «Baumformel» $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$.

$$\mu = E(X) = np$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{npq}$$

Binomiale Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$
X zählt die Anzahl Erfolge, wenn ein Bernoulli-Versuch n mal wiederholt wird, wobei jeder mit Wahrscheinlichkeit p zum Erfolg führt.

$$P(X = k) \; = \; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Konfidenzintervall: $[\overline{x} - 2s_{\overline{x}}, \overline{x} + 2s_{\overline{x}}]$

Bei mindestens $n = 60$ Messwerten. Bei kleinerem n unterschätzt man damit die Grösse des nötigen Intervalls.

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})}$$

Anschaulich: Das erste Quartil ist ein Wert, der grösser als oder gleich ist wie 25% der Messwerte und kleiner als oder gleich ist wie 75% der Messwerte.
So ist der Wert aber nicht eindeutig definiert. Es gibt verschiedene Methoden, diesen Wert zu berechnen (siehe Skript).

Salopp: Der Median ist der Wert, so dass eine Hälfte der Werte darüber und die andere Hälfte darunter liegt.

Präzise Berechnung: Annahme: Die Messwerte $x_1, \ldots, x_n$ sind aufsteigend sortiert. Dann ist der Median «in der Mitte», oder genauer:

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{(n+1)/2} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2} \cdot \left(x_{n/2} + x_{n/2+1}\right) & \text{wenn } n \text{ gerade} \end{cases}$$