Differential und Integralrechnung

Ohne Hilfsmittel

1. Berechne die erste Ableitung der Funktion f und vereinfache das Ergebnis so weit wie möglich.

   a) $f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$, b) $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 + 1})$

2. Bestimme *m* derart, dass der Graph der Funktion $f(x) = m \bullet x$

   a) jenen der Funktion $g(x) = x^2 + 1$ berührt.

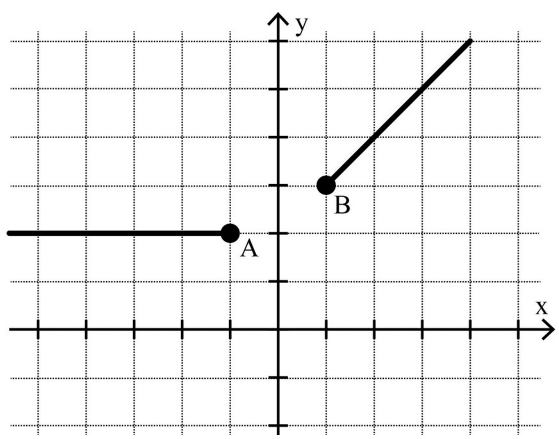
   b) jenen der Funktion $h(x) = \frac{2}{x}$ senkrecht schneidet.

   c) mit jenem der Funktion $i(x) = x^2$ die Fläche 36 einschliesst.

3. a) Bestimme den Definitionsbereich und die Nullstellen der Funktion f(x) = log(x + 2) + log(x – 2).

   b) Berechne f''(ln(2)) für die Funktion $f(x) = (2x+1) \cdot e^{-2x}$. Vereinfache soweit als möglich.

5. In der Skizze sind zwei geradlinige Gleise abgebildet (Sicht von oben), die in den Punkte A bzw. B enden. Diese Gleise sollen durch ein Gleisstück knickfrei verbunden werden. Bestimme eine Polynomfunktion zweiten Grades, die dieses Gleisstück beschreibt (1 Einheit = 1 Häuschen).

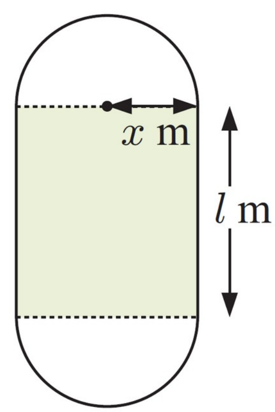


6. a) [2] Ein Stadion hat 30 Sitzplatz-Sektoren. Jeder Sektor hat 20 Sitzreihen, wobei die erste Reihe 18 Sitze, die zweite Reihe 19 Sitze, die dritte Reihe 20 Sitze, etc. besitzt.

   Wie viele Sitzplätze gibt es im Stadion?

   b) [3] Im Stadion soll eine 400m-Rennbahn (bestehend aus zwei Geraden Strecken der Länge *l* m und zwei Halbkreisen mit Radius *x* m) gebaut werden. Die Fläche dazwischen soll für ein rechteckiges Fussballfeld genutzt werden.

   Wie gross ist *l*, wenn die Rechtecksfläche maximalen Inhalt haben soll?

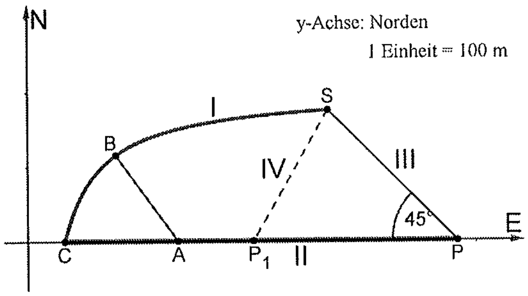


Differential- und Integralrechnung

Mit Hilfsmittel

1. Analysis (2, 3, 2, 2, 4)

Ein Industriegebiet wird von drei Strassen I, II und III begrenzt. Strasse I liegt auf dem Graphen der Funktion $f(x) = 4 - \frac{4}{x}$ für $x > 0$, Strasse II auf der x – Achse und die Strasse III führt in südöstlicher Richtung und schneidet Strasse II im Punkt $P(11.5 / 0)$.

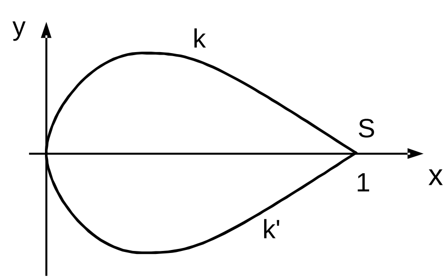


a) Berechne den Winkel, unter dem sich die Strassen I und II in C schneiden.
b) Bestimme die Koordinaten des Schnittpunktes S der Strassen I und III.
c) Berechne den Flächeninhalt des Industriegebietes in ha (Beachte: 1 Einheit = 100 m).
d) Vom Punkt S aus ist eine geradlinige Strasse IV zur Strasse II im Punkt P_1 geplant, die vom Industriegebiet eine allseitig geradlinig begrenzte Teilfläche von 10.5 ha abgrenzen soll. Beschreibe die Strasse IV durch eine Gleichung.
e) Vom Punkt $A(4 / 0)$ aus soll ein geradlinig verlaufender, möglichst kurzer Kanal gebaut werden und an den in der Strasse I liegenden Hauptkanal in einem Punkt B angeschlossen werden. Gib die Koordinaten des Anschlusspunktes B und die minimale Kanallänge an.

2) Die Skizze zeigt die Kurve k der Funktion mit der Gleichung

$f(x) = (1 - x)\sqrt{x}$

im Intervall $0 \le x \le 1$ (vgl. Skizze). Diese Kurve k bildet zusammen mit ihrem Spiegelbild k' eine zur x-Achse symmetrische Figur.



a) Welches ist die grösste Breite der Figur (parallel zur y-Achse gemessen)?
b) Berechnen Sie den Inhalt der von k und k' eingeschlossenen Fläche.
c) Bei der Rotation der Fläche von b) um die x-Achse entsteht ein tropfenförmiger Körper. Wie gross ist sein Volumen?
d) Wie gross ist der Schnittwinkel von k und k‘ in S?

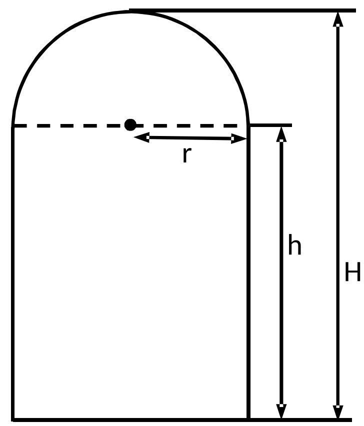
3) Auf einem Bauernhof soll ein Futterweizensilo gebaut werden, das Platz für 110 Tonnen Futterweizen bieten soll. Die Form des Silos besteht aus einem Kreiszylinder mit Boden und einer Halbkugel (siehe Längsschnitt). 9 P

a) Welches Volumen besitzt ein derartiges Silo, wenn sein Durchmesser 5 m und seine Gesamthöhe H = 12 m messen?

b) Die Dichte von Futterweizen beträgt 700 kg/m ^{3}. Haben im Silo aus der Teilaufgabe a) 110 Tonnen Futterweizen Platz?

c) Notieren Sie das Volumen V und die Oberfläche S (inkl. Boden) als Funktionen von r und h.

d) Das abgebildete Silo soll das Volumen 175 m ^{3} aufweisen. Die Oberfläche soll minimal sein. Geben Sie für diesen Fall den Radius r und die Höhe h an. (Tipp: Lösen Sie das Volumen V nach h auf und setzen Sie h in S ein.)



4.1. Bei einem geraden Kreiskegel ist die Mantellinie s fest vorgegeben. Der Winkel α ist der halbe Öffnungswinkel des Kegels, also der Winkel zwischen Mantellinie und Kegelachse.

a) Zeige, dass für das Kegelvolumen in Abhängigkeit von α gilt $V(\alpha) = \frac{\pi}{3} s^3 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$.

b) Für welche Wahl des Winkels α wird das Volumen des Kegels maximal?

4.2. Gegeben ist die Funktionsschar $f_t(x) = (t - x) \cdot e^x$. Der Graph für ein t wird mit K_t bezeichnet.

a) Untersuche K_t (für ein allgemeines t) auf Nullstellen, Hoch- Tief- und Wendepunkte sowie auf Asymptoten. Zeichne K_1 und K_2 im Bereich von x = -3 bis x =3 in dasselbe Koordinatensystem. Wähle 2 Häuschen für die Einheit 1.

b) Die Kurven K_1, K_2, die Gerade x = 1 und die Gerade x = z (z<1) begrenzen eine Fläche mit Inhalt A(z). Berechne A(z) und den Grenzwert von A(z) für $z \to -\infty$

4.3. a) Der Rand eines Glases kann durch die Funktion $f(x) = -0.001x^3 + 0.034x^2 - 0.249x + 3.4$ [cm] beschrieben werden, wobei $0 \le x \le 18$ [cm] gilt. Durch die Rotation dieser Kurve um die x-Achse entsteht das Glas als Rotationskörper (liegend, Öffnung rechts). Es werden 500cm^3 Wasser ins (wieder stehende) Glas gefüllt. Bis zu welcher Höhe reicht das Wasser?

b) Folienzelte zum Anbau von Frühgemüse haben eine parabelförmige Querschnittfläche. Berechne das Volumen eines solchen Zeltes für die Breite b, die Höhe h und die Länge l .